

Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю «Математика»
В.Н. Деснянский
«28» *ноября* 2023 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2023-2024 УЧ. ГОД
Заключительный этап
9-10 классы

Вариант 1

Задание №1

Упростить выражение до целого числа:

$$\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} + \frac{4\sqrt{6+\sqrt{2}}}{\sqrt{6-\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$$

Задание №2

Ученик шел от дома до школы со скоростью 3 км/час и опоздал на урок на одну минуту. В другой раз он пошел со скоростью 4 км/час и пришел за три минуты до начала урока.

С какой скоростью ему нужно идти в следующий раз, чтобы прийти в точности к началу урока?

Задание №3

Сравнить числа:

$$\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \text{ и } \sqrt{8}$$

Ответ должен быть обоснован.

Задание №4

Решить уравнение:

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$$

Задание №5

Решить систему:

$$\begin{cases} x(y+z) = 14 \\ y(x+z) = 18 \\ z(x+y) = 20 \end{cases}$$

Задание №6

Решить неравенство:

$$(|x-2| - |x|)(\sqrt{x+2} - \sqrt{1-x}) > 0$$

Задание №7

Решить уравнение:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1$$

Задание №8

В треугольнике ABC проведена высота AH и биссектриса BE.
Известно, что угол BEA = 45°.
Найти угол EHC.

Задание №9

Решить в целых числах уравнение:

$$2x^2 + 5xy + 3y^2 + 5x + 8y = 6$$

Утверждаю:

Председатель методической
комиссии по профилю
«Математика»

В.Н. Деснянский
«28» ноября 2023 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2023-2024 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям очного тура
9-10 классы

Вариант 1

Задание №1

Имеем: $3 - 2 \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$; $3 + 2 \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$.

Далее:

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{4(6 + \sqrt{2})}{\sqrt{34}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 1)^2 + 2(6 + \sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 12 + 2\sqrt{2} = 15$$

Ответ: 15

Задание №2

Пусть S – расстояние в км от дома до школы, t – время в часах от выхода ученика из дома до начала урока в школе, v – скорость, с которой должен идти ученик, чтобы прийти точно к началу урока. Тогда имеем следующую систему:

$$\frac{S}{3} = t + \frac{1}{60}, \frac{S}{4} = t - \frac{1}{20}.$$

$$\text{Отсюда } S = \frac{4}{5}, t = \frac{1}{4} \Rightarrow v = \frac{S}{t} = \frac{16}{5} = 3,2 \text{ км/час}$$

Ответ: 3,2 км/час

Задание №3

Имеем:

$$(\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}, (3 - 2\sqrt{2})^2 = 17 - 12\sqrt{2}; 7 + 5\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^3.$$

Следовательно, левое число равно:

$$\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1 = 2\sqrt{2}.$$

Значит числа равны

Ответ: числа равны

Задание №4

ОДЗ $x \geq \frac{1}{2}$. В ОДЗ уравнение можно записать в виде:

$$(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1} - 3) = 4.$$

Левая часть этого равенства есть произведение возрастающих функций в ОДЗ. А тогда левая часть также является возрастающей функцией. Поэтому эта функция может равняться четырем не более чем в одной точке. Подбором убеждаемся, что подходит $x = 7$.

Ответ: 7

Задание №5

Вычитая каждое из уравнений из суммы двух остальных, получим

$$zy = 12, zx = 8, yx = 6.$$

Умножая эти равенства, получим:

$$x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 576 = 24^2 \Rightarrow x \cdot y \cdot z = \pm 24.$$

Разделяя это равенства на каждое из предыдущих, получим:

$$x = \pm 2, y = \pm 3, z = \pm 4.$$

Комбинируя знаки, получим 8 решений. Однако проверка показывает, что система имеет лишь два решения: (2; 3; 4) и (-2; -3; -4).

Ответ: (2; 3; 4) и (-2; -3; -4)

Задание №6

Заменяем данное неравенство на равносильное:

$$(|x-2| - |x|) \cdot (|x-2| + |x|) \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{1-x}) \cdot (\sqrt{x+2} - \sqrt{1-x}) > 0$$

$$\Leftrightarrow ((x-2)^2 - x^2) \cdot (x+2-1+x) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2-x) \cdot (x-2+x) \cdot (2x+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$

Задание №7

Пусть $x \neq \frac{k\pi}{2}$. Тогда для всех таких x выполняется неравенство $|\sin x| < 1, |\cos x| < 1$. А следовательно $\cos^3 x < \cos^2 x, \sin^3 x < \sin^2 x$.

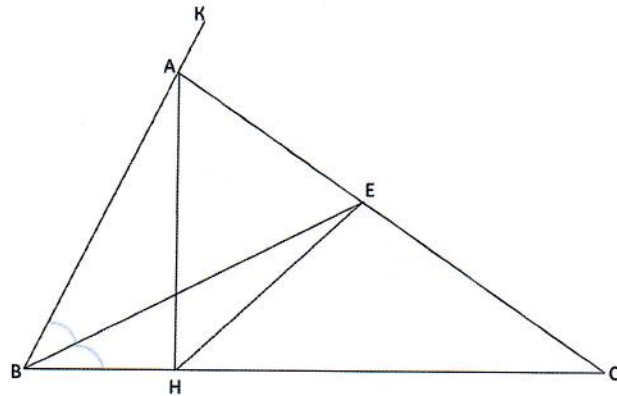
Отсюда $\cos^3 x + \sin^3 x < \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

А тогда решением будет $x = 2\pi k, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$

Ответ: $\left\{2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi m \mid m, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Задание №8

Пусть ABC данный треугольник, где AH – высота, BE – биссектриса, а угол $BEA = 45^\circ$. Найти угол ENC .



Решение:

Пусть K – точка на продолжении BA за т. A .

Покажем, что AC есть биссектриса угла NAK обозначим $\angle B = 2\alpha$.

Тогда $\angle BAN = 90^\circ - 2\alpha$, $\angle NAC = 90^\circ - 45^\circ + \alpha = 45^\circ + \alpha$,

$\angle CAK = 180^\circ - 90^\circ + 2\alpha - 45^\circ - \alpha = 45^\circ + \alpha$. Следовательно

$\angle NAC = \angle CAK = 45^\circ + \alpha$.

Значит AC – биссектриса внешнего угла A . А тогда т. E есть пересечение биссектрисы BE , биссектрисы AC и отрезка HE , который является биссектрисой прямого угла N . Поэтому искомый угол равен 45° .

Ответ: 45°

Задание №9

Данное уравнение можно представить в виде:

$$(x + y + 3)(2x + 3y - 1) = 3$$

Так как x, y по условию целые числа, то равенство возможно, если

$$\begin{cases} x + y + 3 = 1 \\ 2x + 3y - 1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 3 = 3 \\ 2x + 3y - 1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 3 = -3 \\ 2x + 3y - 1 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 3 = -1 \\ 2x + 3y - 1 = -3 \end{cases}$$

Решая эти системы, получим 4 решения, которые, как показывает проверка, удовлетворяют начальному уравнению.

Ответ: $(-2; 2), (-10; 8), (-18; 12), (-10; 6)$

Утверждаю:
Председатель методической
комиссии по профилю
«Математика»
В.Н. Деснянский
«28» ноября 2023 г.

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2023-2024 УЧ. ГОД
Заключительный этап
9-10 классы

Вариант 2

Задание №1

Упростить выражение:

$$\frac{a^2 - ac^2 + 2c^2 - 4}{a^2 + 2a + 2c^2 - c^4} - \frac{a^2 - 4a + 4}{a^2 + ac^2 - 2a - 2c^2}$$

Задание №2

Я гроб по течению и, проезжая под мостом, потерял шляпу. Через 10 минут Я это заметил и, повернув и грёбя с той же силой, нагнал шляпу в 1 км ниже моста.

Какова скорость течения реки в км/час?

Задание №3

Решить уравнение:

$$\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

Задание №4

Определить какое число больше:

$$\frac{3197}{7678} \text{ и } \frac{31973197}{76787678}$$

Задание №5

Решить систему:

$$\begin{cases} \frac{xyz}{x+y} = 8 \\ \frac{xyz}{z+x} = 6 \\ \frac{xyz}{y+z} = 4,8 \end{cases}$$

Задание №6

Решить в целых числах уравнение:

$$2x^2 - 3xy - x - 2y^2 + 7y = 5$$

Задание №7

На гипотенузе АВ прямоугольного треугольника АВС взяты такие точки М и N, что ВС=ВМ и АС=АN.

Найти угол МСN.

Задание №8

Решить уравнение:

$$\sin^3 x - \cos^3 x = 1$$

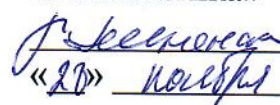
Задание №9

Решить неравенство:

$$(|1 - 2x| - |x + 2|)(\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{2 - x}) > 0$$

Утверждаю:

Председатель методической
комиссии по профилю
«Математика»

 В.Н. Деснянский
«20» ноября 2023 г.

**ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ «ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «МАТЕМАТИКА»
2023-2024 УЧ. ГОД
Краткие решения к заданиям очного тура
9-10 классы**

Вариант 2

Задание №1

Преобразуя первую дробь, имеем:

$$\frac{a^2 - 4 + c^2(2 - a)}{(a + c^2)(a - c^2 + 2)} = \frac{(a - 2)(a + 2 - c^2)}{(a + c^2)(a + 2 - c^2)} = \frac{a - 2}{a + c^2}$$

Преобразуя вторую дробь имеем:

$$\frac{(a - 2)^2}{(a + c^2)(a - 2)} = \frac{a - 2}{a + c^2}$$

Значит все выражение равно нулю.

Ответ: 0

Задание №2

Пусть V – скорость гребца, x км/час – скорость течения. Тогда по условиям задачи получим равенство:

$$\frac{1-x/6}{x} = \frac{\frac{V+x}{6}-1}{V-x}$$

Отсюда имеем $(6 - x)(V - x) = x(V + x - 6)$. Раскрывая скобки, получим:

$$6V - 6x - Vx + x^2 = Vx + x^2 - 6x \Rightarrow x = 3$$

Ответ: 3 км/час

Задание №3

Запишем уравнение в виде:

$$\sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{3x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x + 4}$$

Воспользуемся формулой $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Тогда уравнение будет иметь вид:

$$\frac{2(x+1)}{\sqrt{3x^2 + 2x + 1} + \sqrt{3x^2 - 1}} = \frac{-3(x+1)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 4}}$$

Отсюда $x = -1$ есть корень уравнения, что легко проверяется. Если $x \neq -1$, то обе части уравнения будут иметь разные знаки, следовательно, других корней нет.

Ответ: -1

Задание №4

Делим число 31973197 на 3197. Получим 10001. Аналогично число 76787678 делим на число 7678, также получим 10001. Следовательно: $\frac{31973197}{76787678} = \frac{3197}{7678}$. Значит эти числа равны.

Ответ: числа равны.

Задание №5

Деля первое уравнение на второе и первое на третье, получим

$$\frac{x+z}{x+y} = \frac{4}{3}, \frac{y+z}{x+y} = \frac{5}{3}$$

Значит:

$$\begin{cases} x + 4y - 3z = 0 \\ 5x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 4\frac{y}{x} - 3\frac{z}{x} = 0 \\ 5 + 2\frac{y}{x} - 3\frac{z}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x} = 2, \frac{z}{x} = 3 \Rightarrow y = 2x, z = 3x$$

Подставляя в первое уравнение, получим: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

Ответ: (2; 4; 6), (-2; -4; -6)

Задание №6

Данное уравнение можно представить в виде:

$(2x + y - 3)(x - 2y + 1) = 2$. Так как по условию x, y - целые числа, то равенство возможно при условии:

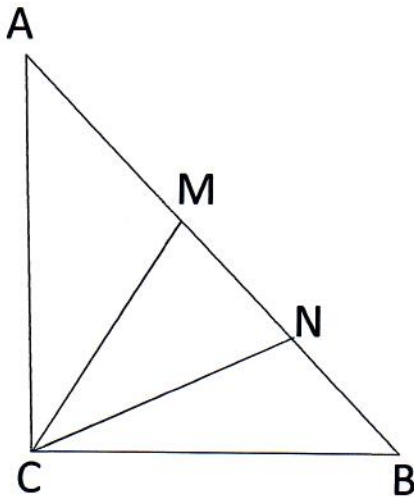
$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 1 \\ x - 2y + 1 = 2' \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 3 = -1 \\ x - 2y + 1 = -2' \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 3 = 2 \\ x - 2y + 1 = 1' \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 3 = -2 \\ x - 2y + 1 = -1' \end{cases}$$

Решая эти системы, находим два решения. Это будет:

$$x = 0, y = 1; x = 2, y = 1$$

Ответ: (0;1), (2;1)

Задание №7



Дано $\triangle ACB$ – прямоугольный треугольник, AB – гипотенуза, $BC = BM$, $AC = AN$. Найти угол MCN .

Решение

Пусть $\angle MCN = \beta$, а угол B равен α

Имеем:

$$\begin{aligned} \angle ANC &= 45^\circ + \frac{\alpha}{2}, \quad \angle ACN = 45^\circ + \frac{\alpha}{2} + \\ \angle CMB &= 90^\circ - \frac{\alpha}{2}, \quad \angle BCM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \angle CNB &= 180^\circ - \angle CNA = 135^\circ - \frac{\alpha}{2} + \\ \angle NCB &= 180^\circ - \alpha - 135^\circ + \frac{\alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\text{А тогда угол } \beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - 45^\circ + \frac{\alpha}{2} = 45^\circ$$

Ответ: 45

Задание №8

Пусть $x \neq \frac{k\pi}{2}$, тогда $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, тогда

$\sin^3 x \leq \sin^2 x$, а $\cos^3 x \leq \cos^2 x$. Следовательно,

$$\sin^3 x - \cos^3 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Поэтому равенство возможно лишь в точках: $\frac{k\pi}{2}$.

Отсюда решение будет:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad x = \pi + 2\pi m \quad k, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi + 2\pi m \quad k, m \in \mathbb{Z}$

Задание №9

$$\text{ОДЗ: } x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$$

Данное неравенство в ОДЗ будет равносильным:

$$(|2x - 1| - |x + 2|)(|2x - 1| + |x + 2|) \cdot (\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{2 - x})(\sqrt{1 + 2x} + \sqrt{2 - x}) > 0$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} ((2x - 1)^2 - (x + 2)^2)(1 + 2x + x - 2) > 0 &\Leftrightarrow (2x - 1 - x - 2)(2x - 1 + x + \\ + 2)(3x - 1) > 0 &\Leftrightarrow (x - 3)(3x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right) > 0 \end{aligned}$$

Решая методом интервалов с учетом ОДЗ получим:

$$\text{Ответ: } x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$$